Cadre : E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. $u \in \mathcal{L}(E)$ est identifié à sa matrice dans une base appropriée.

I Diagonalisation

1) Éléments propres

Définition 1. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, le scalaire λ est appelée valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On dit alors que x est un vecteur propre de u associé à λ.
On appelle spectre de u, noté $\mathrm{Sp}(u)$, l'ensemble des valeurs propres de u.

Remarque 2. *(i) 0 est valeur propre de u ssi $\mathrm{Ker}\, u \neq \{0\}$.*

(ii) Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on dit que $X \in \mathbb{K}^n$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$. On note également $\mathrm{Sp}(A)$ le spectre de A. Si A est la matrice d'un endomorphisme u, $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$.

Définition 3. Soit λ une valeur propre de u. On définit E_λ par :

$$E_\lambda = \{x \in E \,|\, u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E)$$

E_λ est un sous-espace vectoriel de E stable par u, appelé sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ.

Proposition 4. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres distinctes de u, alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}, \ldots, E_{\lambda_k}$ sont en somme directe.*

2) Polynôme annulateur, polynôme minimal

Définition 5. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$.
Pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$, on note :

$$P(f) = \sum_{i=0}^{p} a_i f^i \in \mathcal{L}(E) \text{ où } f^k = \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{k \text{ fois}}$$

Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note :

$$P(A) = \sum_{i=0}^{p} a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

Définition 6. L'application suivante est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbre :

$$\varphi_u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ X & \longmapsto & u \end{array} \right.$$

On note $\mathbb{K}[u]$ son image.

Remarque 7. *Comme $\mathbb{K}[X]$ est une algèbre commutative, $\mathbb{K}[u]$ aussi.*

Théorème 8 (Lemme des noyaux)**.** *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P = P_1 \ldots P_k$ dans $\mathbb{K}[X]$ tel que les P_i sont premiers entre eux deux à deux, alors :*

$$\mathrm{Ker}\, P(f) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\, P_i(f)$$

Proposition 9. *Si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow \pi_f(\lambda) = 0$.*

3) Polynôme caractéristique

Définition 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme de $\mathbb{K}[X]$ défini par :

$$\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$$

Remarque 11. *(i) $\chi_A(0) = \det A$*

(ii) Une matrice a même polynôme caractéristique que a transposée.

(iii) Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

Exemple 12. *Si $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, alors $\chi_A(X) = X^2 - 5X - 2$.*

Définition 13. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de u le polynôme caractéristique de la matrice de u, on le note χ_u.

Proposition 14. *λ est valeur propre de u ssi $\chi_u(\lambda) = 0$.*

Remarque 15. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut écrire :*

$$\chi_A(X) = \sum_{i=0}^{n} \beta_i X^i \text{ où } \beta_0 = (-1)^n \det A,\ \beta_{n-1} = -\operatorname{tr} A,\ \beta_n = 1$$

Proposition 16. *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(f) = 0$.
Si λ est valeur propre de f, alors $P(\lambda) = 0$.*

Remarque 17. *χ_f et π_f ont les mêmes racines.*

Exemple 18. *(i) Si f est nilpotent d'ordre n, $\pi_f(X) = X^n = \chi_f(X)$.*

(ii) Si f est l'application nulle, $\pi_f(X) = X$ et $\chi_f(X) = X^n$.

Théorème 19 (Cayley-Hamilton)**.** *Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, $\chi_f(f) = 0$.*

4) Diagonalisabilité et critères de diagonalisabilité

Définition 20. Un endomorphisme est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale. Une matrice est diagonalisable si l'endomorphisme associé est diagonalisable.

Remarque 21. *Une matrice est diagonalisable si, et seulement si, elle est semblable à une matrice diagonale.*

Théorème 22. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est diagonalisable*

(ii) *Il existe une base de E formés de vecteurs propres de u.*

(iii) *E est somme directe des espaces propres de u.*

Théorème 23. *Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, les assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) *u est diagonalisable*

(ii) *χ_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

(iii) *Il existe $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ scindé à racines simples tel que $P(u) = 0$.*

Corollaire 24. *Si u est diagonalisable, alors pour tout sous-espace V de E stable par u, l'endomorphisme induit $u|_V \in \mathcal{L}(V)$ est diagonalisable.*

Application 25. *Un endomorphisme est diagonalisable si, et seulement si, il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$.*

Théorème 26. *u est diagonalisable si, et seulement si, χ_u est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension de l'espace propre associé.*

II Résultats de diagonalisabilité

1) Codiagonalisabilité

Proposition 27. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors :*

(i) *Tout sous-espace propre de u est stable par v.*

(ii) $\operatorname{Im} u$ *est stable par v.*

Théorème 28. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$, alors il existe une base commune de diagonalisation de u et v. On dit que u et v sont codiagonalisables.*

Application 29. *$\mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ et $GL_m(\mathbb{R})$ sont isomorphes en tant que groupes si, et seulement si, $n = m$.*

2) Endomorphisme symétrique

Définition 30. Soit E un espace euclidien, et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ autoadjoint, alors u est un endomorphisme symétrique. On note $S(E)$ l'ensemble des endomorphismes sur E symétriques, et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles. On a $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow {}^tM = M$.

Théorème 31. *$u \in S(E)$ est diagonalisable dans une base orthogonale.*

Remarque 32. *Le résultat est faux dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.*

Exemple 33. *Pour $M = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j & j & 1 \\ j^2 & 1 & j^2 \end{pmatrix}$, on a $M^2 = 0$. Donc si M était diagonalisable, M serait nulle. M n'est donc pas diagonalisable.*

3) Corps finis

Théorème 34. *Soit $\mathbb{F}_q$ un corps fini de cardinal q, E un $\mathbb{F}_q$-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. u est diagonalisable si, et seulement si, $X^q - X$ est un polynôme annulateur de u.*

III Applications

1) Résolution de systèmes linéaires

Théorème 35. *Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable, alors $M^k = PD^kP^{-1}$.*

Exemple 36. *Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, alors $A^k = \begin{pmatrix} 2\times 2^k - 3 & 2^k - 3^k \\ -2\times 2^k + 2\times 3^k & -2^k + 2\times 3^k \end{pmatrix}$.*

Application 37. *Système linéaire de suites récurrentes :*
Si $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases}$ *et* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = 1 \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} u_n = 3 \times 2^{n+1} - 4 \times 3^n \\ v_n = -3 \times 2^n + 4 \times 3^n \end{cases}$.

Application 38. *Système différentiel linéaire à coefficients constants :*
Si $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = 2x + 4y \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} x = C_1e^{2t} + C_2e^{3t} \\ y = C_1e^{2t} - C_2e^{3t} \end{cases}$.

2) Décomposition de Dunford

Proposition 39. *Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $F \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. Soit $F = \beta M_1^{\alpha_1} \cdots M_s^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$ du polynôme F. Pour tout i, on note $N_i = \operatorname{Ker} M_i^{\alpha_i}(f)$. Alors :*

(i) $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$

(ii) Pour tout i, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} N_j$ est un polynôme en f.

Théorème 40 (Décomposition de Dunford)**.** *Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ dont le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Alors il existe un unique couple (n, d) d'endomorphismes tels que :*

(i) d est diagonalisable, n est nilpotent

(ii) $f = d + n$ et n et d commutent

De plus, d et n sont des polynômes en f

Application 41. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$. Soit $A = D + N$ sa décomposition de Dunford, alors la décomposition de Dunford de e^A est donnée par $e^A = e^D + e^D(e^N - I_n)$ avec e^D diagonalisable et $e^D(e^N - I)$ nilpotente.*

3) Réduction des endomorphismes normaux

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme normal.

Lemme 42. *Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors F et $F^\perp$ sont stables par u et $u^\star$.*

Lemme 43. *Supposons que $n = 2$. Alors :*

(i) Si u a une valeur propre réelle, u est diagonalisable dans une base orthonormée.

(ii) Si u n'a pas de valeur propre réelle, la matrice de u dans une base orthonormée est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Théorème 44. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :*

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & \tau_1 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & \tau_s \end{pmatrix}$$

où $n = r + 2s$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ et $\tau_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pour $k \in [\![1, s]\!]$.

Développements

— Décomposition de Dunford (39,40) [Gou]

— Réduction des endomorphismes normaux (42,43,44) [Gou]

Références

[Gou] Xavier Gourdon. *Les Maths en Tête : Algèbre.* Ellipses, 2e edition

[CG] Philippe Caldero and Jérôme Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 1.* Calvage et Mounet

[BMP] Vincent Beck, Jérôme Malick, and Gabriel Peyré. *Objectif Agrégation*